

Electromagnétisme

Examen Juin 2011 (durée 2h) 2nd Session

I. Questions de cours.

L'espace, supposé vide de charges et de courants, est rapporté à un repère orthonormé (Oxyz).

Ecrire les équations de Maxwell et en déduire les équations de propagation des champs électrique E et magnétique B .

II. Solénoïdes couplés

On considère un solénoïde C_1 d'axe $z'z$, de rayon a , comportant n_1 spires par unité de longueur et parcouru par un courant variable d'intensité $i_1(t) = i_0 \cos \omega t$. On montre qu'en négligeant les effets de bord (approximation du solénoïde infini), le champ magnétique B_1 à l'intérieur du solénoïde est uniforme et a pour expression $B_1(t) = \mu_0 n_1 i_1(t) e_z$.

1. Ecrire l'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale à l'intérieur du solénoïde (loi de Faraday).

2. En utilisant les considérations de symétries de la distribution de courant, montrer que le champ électrique $E_1(t)$ induit dans le solénoïde est dirigé suivant e_ϕ . En déduire l'expression de $E_1(t)$ en fonction de μ_0 , n_1 , i_0 , ω , ρ et t . (on utilisera les coordonnées cylindriques ρ , ϕ , z et on supposera la constante d'intégration nulle).

On suppose maintenant que les N_1 spires du solénoïde C_1 sont parcourues par un courant d'intensité constante I_1 . On place à l'intérieur de C_1 une bobine plate C_2 de surface S_2 constituée de N_2 spires circulaires de rayon b avec $b < a$ et parcourues par un courant d'intensité constante I_2 . La bobine C_2 est mobile autour d'un axe vertical (Δ) de vecteur unitaire e_Δ perpendiculaire à l'axe commun $z'z$ des deux bobines C_1 et C_2 . On note n_2 le vecteur unitaire de la normale à la surface S_2 de la bobine C_2 . On note θ l'angle (e_z , n_2) orienté positivement dans le sens trigonométrique.

3. Etablir l'expression du flux ϕ_{12} du champ magnétique B_1 à travers les N_2 spires de C_2 en fonction de N_2 , S_2 , B_1 et θ .

4. Donner l'expression du moment magnétique M_2 de la bobine C_2 en fonction N_2 , I_2 et S_2 en précisant sa direction. En déduire l'expression du moment Γ_Δ du couple des forces de Laplace s'exerçant sur C_2 en fonction de μ_0 , b , n_1 , N_2 , I_1 , I_2 et θ en précisant sa direction. Montrer que ce couple magnétique est un couple résistant.

III. Ondes électromagnétiques non planes.

Entre deux plaques métalliques parfaits, occupant les plans $y=0$ et $y=a$, se propage suivant Oz une onde électromagnétique (\mathbf{E} , \mathbf{B}) monochromatique, de pulsation ω , dont les composantes suivant les axes du repère orthonormé ($Oxyz$) sont :

$$- \mathbf{E} (E_x = E_0 \sin (\pi y/a) \sin(\omega t - kz), E_y = 0, E_z = 0) \text{ et}$$

$$- \mathbf{B} (B_x = 0, B_y = B_1 \sin (\pi y/a) \sin(\omega t - kz), B_z = B_2 \cos (\pi y/a) \cos(\omega t - kz))$$

1. Montrer que l'onde électromagnétique proposée vérifie les équations de Maxwell si $B_x=0$ et si B_1 et B_2 se calculent simplement en fonction de E_0 .
2. Etablir la relation de dispersion $k(\omega)$ et calculer la pulsation de coupure ω_c de l'onde en fonction de a et c (vitesse de l'onde dans le vide). Quelle relation doivent vérifier la distance a entre les plaques et la longueur d'onde λ pour retrouver la structure de l'onde plane monochromatique ?
3. Exprimer la vitesse de phase v_φ ainsi que la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$ du milieu vide entre les deux conducteurs.
4. Exprimer le vecteur de Poynting \mathbf{R} de l'onde et calculer sa valeur moyenne dans le temps $\langle \mathbf{R} \rangle_T$. En déduire, en fonction de a , E_0 , k , l , ω et μ_0 (perméabilité du vide), la puissance moyenne $\langle \langle P \rangle_T \rangle_y$ qui traverse un plan de section $z = \text{cte}$ entre les plaques de largeur l dans la direction Ox pendant une période T .
5. Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique e_{em} entre les plaques. En déduire sa valeur moyenne sur une période $\langle e_{em} \rangle_T$. En déduire sa valeur moyenne $\langle \langle e_{em} \rangle_T \rangle_y$ sur la section droite d'abscisse $z = \text{cte}$, que l'on exprimera en fonction de E_0 et ϵ_0 (permittivité du vide).
6. En déduire la vitesse de propagation v de l'énergie électromagnétique dans ce guide d'ondes en fonction de c et v_φ . Comparer avec la vitesse de groupe v_g et conclure.